O metodzie wykładu podstaw trygonometrji.

I. Wstęp.

Metoda wykładu matematyki podlegać może krytyce ze stanowiska naukowego i ze stanowiska dydaktycznego. Zwolennicy tradycyjnych metod nauczania odrzucają zazwyczaj pierwszy rodzaj krytyki; utrzymują bowiem, że jedno z tych dwuch stanowisk wyłącza drugie, i uzasadniają w ten sposób swój bierny stosunek do nowoczesnych reform nauczania matematyki.

Niema najmniejszej wątpliwości, że wprowadzając w wykładzie szkolnym oderwaną konstrukcję myślową bez racjonalnego jej uzasadnienia, wypowiadamy jedynie puste frazesy, których uczeń zrozumieć nie może i zastosować samodzielnie nie potrafi.

Fakt powyższy, zdaniem naszym, nie rozstrzyga jednak ostatecznie sprawy reform na niekorzyść metody naukowej, gdyż nie mamy dowodu na to, że pojęcia oderwane, wchodzące w zakres matematyki elementarnej, nie mogą być wogóle racjonalnie uzasadnione w sposób przystępny dla umysłu ucznia.

Zastosowania praktyczne nie są bynajmniej wyłącznym celem wykładu nauk matematycznych w szkole średniej: nauki te w programie szkolnym posiadają szersze znaczenie, uważamy je bowiem za niezbędny czynnik kształcący.

Wybór metody wykładu nie może być rzeczą obojętną; niezbędną jest przeto reforma nauczania tych działów matematyki, które zachowały dotychczas odwieczną metodę, nie odpowiadającą słusznym wymaganiom krytyki naukowej.

W historji matematyki znaleźć możemy wiele dowodów na to, że konstrukcje pojęciowe nie zachowują wogóle swej pierwotnej postaci. Zestawiając prace spółczesne z dziełami autorów dawniejszych prze-

konywamy się przytym niejednokrotnie, że możliwa jest ewolucja metody nauk matematycznych w znaczeniu naukowym, uwzględniająca jednocześnie wymagania dydaktyczne.

Bezwzględne przeciwstawianie dwuch powyższych stanowisk, a mianowicie stanowiska naukowego i dydaktycznego — jest nieuzasadnione.

2. Krytyka metody, opartej na konstrukcji linji trygonometrycznych.

Przystępując do właściwego przedmiotu pracy niniejszej, sformułować możemy krytykę tradycyjnej metody wykładu podstaw trygonometrji w następujący sposób.

1) Konstrukcja gieometryczna, stanowiąca podstawę określeń poszczególnych funkcji trygonometrycznych, nie jest racjonalnie uzasadniona; pojęcia trygonometryczne, oparte na takiej podstawie, są dla początkującego fikcją matematyczną, a więc i podstawowy dział nauki jest wówczas jedynie wytworem fantazji autora, gdyż właściwego znaczenia pojęć trygonometrycznych konstrukcja taka wykazać nie może.

Metoda tradycyjna nie wytrzymuje przeto krytyki z punktu widzenia elementarnych wymagań dydaktycznych i z tego względu przeciwstawić jej należy metodę, polegającą na racjonalnym uzasadnieniu podstawowych pojęć trygonometrycznych.

Poglądowość, właściwa wszelkim konstrukcjom gieometrycznym wogóle, stanowi jedyną zaletę pedagogiczną „linji trygonometrycznych". Linjami temi, jako ilustracją właściwych pojęć trygonometrycznych, określonych już poprzednio, możemy wszakże posługiwać się zawsze w szkolnym wykładzie trygonometrji bez względu na to, w jaki sposób określone zostały właściwe pojęcia trygonometryczne.

2) Określanie każdej poszczególnej funkcji trygonometrycznej niezależnie od pozostałych jest ujemną stroną metody; wynika stąd bowiem konieczność dowodzenia takich związków algiebraicznych, pomiędzy funkcjami trygonometrycznemi, które korzystniej jest przyjąć za określenia. Jeżeli zwrócimy uwagę na to, że własności czterech ostatnich funkcji wynikają z odpowiednich własności sinusa i cosinusa, to przyznać należy, że celowość bezpośrednich określeń, a więc i doniosłość „linji trygonometrycznych", stanowiących podstawę określeń czterech ostatnich funkcji, jest wysoce problematyczna. Nie zmieniając nawet radykalnie dotychczasowej metody, moglibyśmy zadowolić się „linjami" dwuch pierwszych funkcji, a cztery pozostałe „linje" uważać

jedynie za poglądową ilustrację odpowiednich funkcji trygonometrycznych.

3) Posługując się skomplikowaną konstrukcją ogólną dla określenia funkcji trygonometrycznych kąta ostrego dodatniego (a raczej bezwzględnego) popełniamy rażący błąd metodologiczny, który staje się widoczny wówczas zwłaszcza, gdy wyprowadzamy wzory trygonometryczne dla trójkąta prostokątnego. Z punktu widzenia wymagań dydaktycznych niezbędna jest przeto definicja wstępna, rozważająca funkcje kąta ostrego, jako stosunki boków trójkąta prostokątnego. Pomijanie tej prostej definicji w tradycyjnym wykładzie trygonometrji usprawiedliwić można jedynie dążeniem do zachowania jednolitej metody. Ta ostatnia okoliczność nie ma jednak bynajmniej znaczenia decydującego, możemy bowiem pojęcie funkcji kąta ostrego przyjąć za podstawę nowych określeń ogólnych, wskazując racjonalną zasadę takiego uogólnienia.

4) Utożsamianie pojęć różnorodnych, a właściwie podstawianie jednego z tych pojęć na miejsce drugiego, należy do najpospolitszych błędów rozumowania. Zjawisko takie w praktyce pedagogicznej spotykamy bardzo często, w tych wypadkach zwłaszcza, gdy sama metoda przedmiotu skłania umysł ucznia do podobnych błędów. Konstrukcja „linji trygonometrycznych“ stanowi pod tym względem przykład bardzo wymowny. Określamy wprawdzie właściwe pojęcia trygonometryczne, jako stosunki powyższych „linji“ do promienia okręgu; ponieważ jednak konstrukcja gieometryczna jest tu jedyną podstawą logiczną, wyłączone jest bowiem wszelkie racjonalne uzasadnienie pojęć trygonometrycznych, nie należy się przeto dziwić, że na tych „linjach“, które są tylko ilustracją pojęć właściwych, koncentruje się uwaga ucznia, skąd wynika oczywiście błędne pojmowanie funkcji trygonometrycznych.

3. Pojęcia pomocnicze.

Nieuzasadniona konstrukcja podstawowa, na której oparto wykład trygonometrji, nadaje tej nauce pewien specyficzny charakter i oddziela ją od gieometrji elementarnej, tworząc sztuczną granicę pomiędzy dwoma przedmiotami nauki szkolnej.

Metoda, polegająca na racjonalnym uzasadnieniu pojęć trygonometrycznych, powinna wynikać konsekwentnie z tych zasad ogólnych, na których oparte jest zastosowanie rachunku do gieometrji; albowiem przedmiot trygonometrji właściwej stanowi „rozwiązywanie“ trójkąta, a więc

jedno z podstawowych zagadnień, jakie spotykamy w zastosowaniach gieometrycznych rachunku algiebraicznego.

W wykładzie gieometrji elementarnej zastosowania rachunku algiebraicznego nie stanowią odrębnej całości i odnośne wiadomości teoretyczne redukują się zwykle do minimum. Wstęp do trygonometrji powinien przeto zawierać wykład szczegółowy niezbędnych wiadomości ogólnych, wchodzących w zakres powyższego działu gieometrji elementarnej.

Zaczynając od pojęć podstawowych należy zwrócić szczególną uwagę na określenie pojęcia wartości liczebnej, jako stosunku danej wielkości do innej wielkości, jednorodnej z pierwszą, zaznaczając przytym względność pojęcia wartości liczebnej i dowolność wyboru jednostki. Ścisłe określenie pojęcia wartości liczebnej jest rzeczą niezbędną, ponieważ umysł początkującego skłonny jest wogóle do pojmowania wartości liczebnej w sposób doświadczalny, jako wyniku bezpośredniego mierzenia danej wielkości za pomocą pewnej jednostki stałej.

Określiwszy pojęcie wartości liczebnej odcinka, kąta i łuku okręgu, sformułować możemy dwa zadania ogólne, stanowiące przedmiot zastosowania rachunku do gieometrji:

1) poszukiwanie związków algiebraicznych pomiędzy wartościami liczebnemi elementów figury gieometrycznej,

2) obliczanie niewiadomych elementów figury, gdy dane są wartości liczebne pozostałych elementów i wiadome są powyższe związki algiebraiczne.

Rozważając szereg przykładów, znanych już z gieometrji elementarnej, wskazać możemy metodę poszukiwania związków algiebraicznych, zwracając uwagę na to, że dowodzenie najprostszych związków opiera się na proporcjonalności pewnych odcinków, z której wynika proporcjonalność odpowiednich wartości liczebnych.

Ogólna teorja funkcji trygonometrycznych wymaga uwzględnienia znaku wartości liczebnej odcinka i kąta. „Reguły znaków“, uzupełniające konstrukcję „linji trygonometrycznych“, są to umowy formalne i jako takie nie są zazwyczaj racjonalnie uzasadniane. Niezbędne jest jednak uzasadnienie odnośnych pojęć: wprowadzając bowiem „odcinki ujemne“ i „kąty ujemne“ w sposób czysto formalny, wytwarzamy nieusprawiedliwioną i niezrozumiałą konstrukcję pojęciową.

Związki, istniejące pomiędzy wartościami liczebnemi elementów figury gieometrycznej, wyrażamy zapomocą wzorów algiebraicznych. Pożądane są przytym wzory ogólne, niezależne od postaci, jaką posiadać może dana figura gieometryczna w różnych przypadkach szczególnych; mając bowiem wzór ogólny, możemy zawsze obliczyć niewiado-

my element figury gieometrycznej, gdy wiadome są wartości liczebne pozostałych elementów, a postać figury gieometrycznej nie jest znana.

Weźmy pod uwagę następujący przykład.

„Dane są wartości liczebne boków trójkąta ABC ($a=29$, $b=6$, $c=25$); obliczyć mamy rzut boku AB na bok AC“.

Posługując się znanym wzorem:

$$a^2=b^2+c^2-2bx$$

na kwadrat wartości liczebnej boku, leżącego w trójkącie naprzeciw kąta ostrego, znajdujemy

$$x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}=\frac{6^2+25^2-29^2}{26}=-15.$$

Jeżeli wartość liczebną pojmujemy jedynie w ten sposób, w jaki pojęcie to określone zostało początkowo, to rozwiązań ujemnych uwzględniać nie możemy. Rozwiązanie, otrzymane w przykładzie powyższym, dowodzi wówczas tylko, że wzięte dowolnie wartości: $a=29$, $b=6$, $c=25$, nie mogą być wartościami liczebnemi boków takiego trójkąta ABC, w którym kąt A jest kątem ostrym; ponieważ jednak istnieje trójkąt, odpowiadający warunkom zadania, gdyż: $29<6+25$, wnioskujemy przeto, że trójkąt ten posiada kąt rozwarty przy wierzchołku A.

Stosując wzór:

$$a^2=b^2+c^2+2bx,$$

znajdujemy istotnie:

$$x=\frac{a^2-b^2-c^2}{2b}=-\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}=15.$$

To ostatnie rozwiązanie jest liczbą dodatnią, która różni się tylko znakiem od poprzedniego rozwiązania ujemnego; widzimy przeto, że rozwiązując podobny przykład, możemy zadowolnić się zawsze pierwszym wzorem, jeżeli tylko wiemy, w jaki sposób pojmować należy rozwiązanie ujemne. Zwracając uwagę na to, że rzut boku AB leży na boku AC, lub na jego przedłużeniu, zależnie od tego, czy kąt A jest kątem ostrym, czy też rozwartym, przychodzimy do następującego wniosku: „Wzór na kwadrat wartości liczebnej boku, leżącego w trójkącie naprzeciw kąta ostrego, posiada znaczenie ogólne, jeżeli rzutowi boku AB na bok AC przypisujemy wartość liczebną dodatnią lub ujemną, stosownie do tego, czy rzut ten zwrócony jest w kierunku AC, czy też w kierunku przeciwnym“. (Gdy wartość liczebna rzutu równa się zeru, to wzór ogólny otrzymuje znaną postać szczególną i wyraża wówczas związek pomiędzy wartościami liczebnemi boków trójkąta prostokątnego).

Rozważania powyższe wskazują cel, jaki osiągnąć możemy w zastosowaniach rachunku algiebraicznego przez wprowadzenie liczb ujemnych: celem tym jest zachowanie ogólnej postaci wzorów, wyrażających związki pomiędzy wartościami liczebnemi elementów figury gieometrycznej, bez względu na to, jaką postać szczególną posiadać może dana figura gieometryczna w różnych wypadkach szczególnych. Widzimy również w przykładzie powyższym, że podstawę do uwzględnienia znaku wartości liczebnej odcinka otrzymujemy wówczas, gdy odcinkowi temu przypisać możemy ten lub inny kierunek na danej linji prostej: uwzględnienie znaku wartości liczebnej odcinka wymaga przeto rozważania odcinków „względnych" (wektorów). Dwa dowolne punkty *A* i *B*, leżące na linji prostej, wyznaczają pewien odcinek; odcinkowi takiemu przypisać możemy pewien określony „zwrot", rozróżniając jego punkty krańcowe i nazywając jeden z tych punktów „początkiem", a drugi — „końcem" danego odcinka. Odróżniamy przeto „odcinek względny *AB*" od „odcinka względnego *BA*": początkiem pierwszego jest punkt *A*, a początkiem drugiego — punkt *B*.

Gdy rozważamy na danej linji prostej dowolne odcinki względne (a więc takie, które posiadają dowolne punkty początkowe i zwrócone są w tę lub w przeciwną stronę) i uważamy następnie wartość liczebną każdego z tych odcinków za liczbę dodatnią lub ujemną stosownie do tego, w którą stronę jest on zwrócony, to daną linję prostą nazywamy wówczas „osią kierunkową". Odcinki względne, leżące na osi kierunkowej, nazywamy „odcinkami dodatniemi", lub „ujemnemi" zależnie od tego, jaki znak posiada odpowiednia wartość liczebna.

Dla wyznaczenia osi kierunkowej wskazać należy jeden z odcinków względnych na danej osi kierunkowej i wymienić znak jego wartości liczebnej; posługujemy się zwykle w tym celu odcinkiem dodatnim, mówiąc przeto o „osi kierunkowej *AB*", zaznaczamy ten fakt, że odcinek względny *AB* i każdy inny odcinek względny (na prostej nieograniczonej *AB*), zwrócony w tę samą stronę, posiada wartość liczebną dodatnią, a wartości liczebne odcinków względnych, zwróconych w przeciwną stronę, są liczbami ujemnemi. Mówimy również o osi *A'A*, że jest „wyznaczona przez promień *OA*", jeżeli punkt *O* leży wewnątrz odcinka *A'A*.

Teorja funkcji trygonometrycznych kąta dowolnego nie wymaga szczegółowych wiadomości wstępnych z teorji odcinków względnych (teorji wektorów), niezbędne jest wszakże:

1) określenie równości dwuch odcinków względnych;

2) twierdzenie o rzutach prostokątnych dwuch równych odcinków względnych;

3) twierdzenie Chaslesa o związku istniejącym pomiędzy wartościami liczebnemi odcinków względnych, wyznaczonych przez trzy dowolne punkty na osi kierunkowej;

4) określenie stosunku dwuch odcinków względnych, leżących na osiach kierunkowych.

W określeniu równości dwuch odcinków względnych należy uwzględnić długość, kierunek i zwrot odcinka, a więc dwa odcinki względne nazywamy równemi wówczas (i tylko wówczas), gdy odcinki te:

1) są równej dlugości, 2) leżą na jednej linji prostej, lub na dwuch prostych równoleglych i 3) zwrócone są przytym w jedną stronę. Stosując określenie powyższe do odcinków względnych, nie leżących na jednej linji prostej, zauważyć możemy łatwo, że dwa odcinki względne wówczas są równe, gdy czworokąt, utworzony przez połączenie odcinkami jednoimiennych punktów krańcowych — jest równoległobokiem.

Określiwszy równość odcinków względnych, dowieść możemy następującego twierdzenia: „Rzuty prostokątne dwuch równych odcinków względnych, wyznaczone na jednej linji prostej, są także odcinkami równemi".

Związek, istniejący pomiędzy wartościami liczebnemi odcinków względnych, wyznaczonych przez trzy dowolne punkty A, B i C na osi kierunkowej, wyrazić można zapomocą wzoru:

$$(w.\,l.\,AC) = (w.\,l.\,AB) + (w.\,l.\,BC).$$

Wzór ten jest oczywisty w tym wypadku, gdy punkt B leży wewnątrz odcinka AC. Jeżeli punkt C leży pomiędzy punktami A i B, to wówczas:

$$(w.\,l.\,AC) + (w.\,l.\,CB) = (w.\,l.\,AB),$$

a ponieważ wartość liczebna odcinka względnego BC różni się tylko znakiem od wartości odcinka CB, mamy przeto:

$$(w.\,l.\,AC) - (w.\,l.\,BC) = (w.\,l.\,AB),$$

skąd:

$$(w.\,l.\,AC) = (w.\,l.\,AB) + (w.\,l.\,BC).$$

W podobny sposób dowieść możemy powyższego wzoru i w tym wypadku, gdy punkt A leży pomiędzy dwoma pozostałemi punktami.

Stosunek dwuch odcinków (bezwzględnych) równa się stosunkowi ich wartości liczebnych. Dla zachowania powyższej własności uzupełniamy określenie stosunku dwuch odcinków względnych — leżących na osiach kierunkowych — w ten sposób, że stosunek taki uważamy za liczbę dodatnią lub ujemną zależnie od tego, czy dane odcinki są jednoimienne, czy różnoimienne.

Kombinacja trzech pomocniczych pojęć: osi kierunkowej, rzutu prostokątnego i stosunku dwuch odcinków względnych, leżących na

osiach kierunkowych — jest dostateczną podstawą dla określenia funkcji trygonometrycznych kąta dowolnego.

Rozważamy na płaszczyźnie dwie dowolne osie kierunkowe i figurę taką nazywamy „układem dwuch osi kierunkowych". Biorąc następnie dowolne odcinki względne na jednej z tych osi i wyznaczając ich rzuty prostokątne na drugiej osi układu, możemy dowieść, że stosunek rzutu do odpowiedniego odcinka względnego pierwszej osi kierunkowej jest liczbą stałą, niezależną od wyboru tego odcinka. Liczba taka jest spółczynnikiem proporcjonalności rzutu prostokątnego, odpowiadającym danemu układowi osi kierunkowych; nazwiemy ją w skróceniu „spółczynnikiem układu osi kierunkowych", lub też spółczynnikiem jednej osi względem drugiej osi danego układu.

Własności spółczynnika układu osi kierunkowych wyrażamy zapomocą następujących twierdzeń.

I. „Bezwzględna wartość spółczynnika układu osi kierunkowych nie przewyższa jedności".

II. „Jeżeli jedną z osi kierunkowych przenosimy równolegle do dawnego położenia — nie odwracając promienia, wyznaczającego tę oś kierunkową — to spółczynnik układu pozostaje bez zmiany".

III. „Jeżeli odwracamy w przeciwną stronę promień, wyznaczający jedną z osi kierunkowych, to zmieniamy jedynie znak spółczynnika układu".

IV. „Jeżeli dwie osie kierunkowe są wyznaczone przez promienie symetryczne względem trzeciej osi kierunkowej, to równe są spółczynniki tych dwuch układów, jakie tworzy trzecia oś z dwiema pierwszemi osiami kierunkowemi".

V. „Jeżeli dwie osie kierunkowe są wyznaczone przez promienie symetryczne względem prostej prostopadłej do trzeciej osi kierunkowej, to spółczynniki tych dwuch układów, jakie tworzy trzecia oś z dwiema pierwszemi osiami kierunkowemi, różnią się tylko znakami".

VI. „Jeżeli dane są na płaszczyźnie dwa układy osi kierunkowych i jeden z nich jest dowolny, a drugi jest układem prostokątnym, to spółczynnik pierwszego układu równa się sumie iloczynu spółczynników obu jego osi względem jednej osi układu prostokątnego i iloczynu spółczynników tych samych osi kierunkowych względem drugiej osi układu prostokątnego.

Dowodzenie twierdzenia VI.

Poprowadzone są przez punkt O (fig. 1) dwie dowolne osie kierunkowe $B'B$, $C'C$ i dwie inne osie kierunkowe, tworzące układ prostokątny, $A'A$, $D'D$. Spółczynnik pierwszego układu oznaczamy przez x; należy dowieść, że

$$x = aa_1 + dd_1,$$

gdzie a i a_1 oznaczają spółczynniki osi kierunkowych $B'B$ i $C'C$ względem osi kierunkowej $A'A$, a d i d_1 są spółczynnikami tych samych osi względem osi kierunkowej $D'D$.

Bierzemy dowolny punkt P na osi $B'B$ i prowadzimy prostopadłą PM do $A'A$ i prostopadłą PN do $D'D$, a następnie wyznaczamy rzuty prostokątne punktów M, N, P na osi $C'C$.

Pomiędzy wartościami liczebnemi odcinków względnych Op, Om i mp istnieje wiadomy związek:

$$(w.\,l.\ Op) = (w.\,l.\ Om) + (w.\,l.\ mp).$$

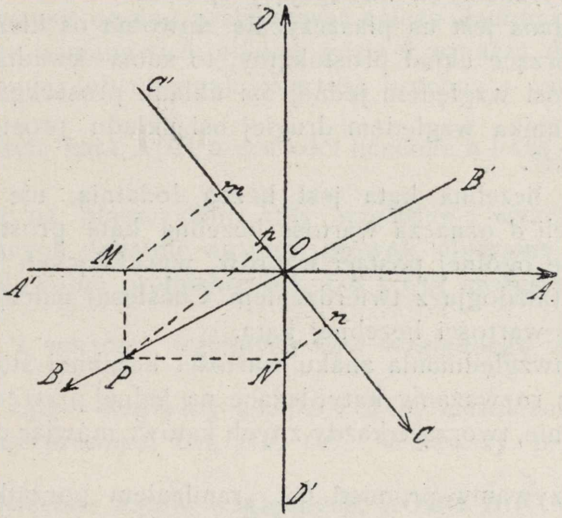


Fig. 1.

Odcinki względne mp i On są rzutami prostokątnemi równych odcinków względnych MP i ON, — mamy przeto:

$$(w.\,l.\ mp) = (w.\,l.\ On),$$

a więc.

$$(w.\,l.\ Op) = (w.\,l.\ Om) + (w.\,l.\ On).$$

Niech l oznacza wartość liczebną odcinka względnego OP; z określenia spółczynnika układu osi kierunkowych wynika wówczas bezpośrednio:

$$(w.\,l.\ Om) = (w.\,l.\ OM)\,.\,a_1 = l\,.\,a.a_1\,,$$

$$(w.\,l.\ On) = (w.\,l.\ ON)\,.\,d_1 = l\,.\,d.d_1\,,$$

$$(w.\,l.\ OP) = l\,.\,x\,;$$

otrzymujemy przeto

$$l.x = l.a.a_1 + l.d.d_1 \,,$$

skąd

$$x = a.a_1 + d.d_1 \,.$$

Twierdzenie powyższe zastosować możemy i w tym wypadku szczególnym, gdy osie $B'B$ i $C'C$ przystają do siebie i jednoimienne odcinki tych osi zwrócone są w jedną stronę. Mamy wówczas

$$x = 1 \,, \quad a_1 = a \,, \quad d_1 = d \,,$$

a więc

$$1 = a^2 + d^2 \,,$$

co słowami wyrażamy w następujący sposób:

„Jeżeli dana jest na płaszczyźnie dowolna oś kierunkowa i dwie inne osie, tworzące układ prostokątny, to suma kwadratu spółczynnika pierwszej osi względem jednej osi układu prostokątnego i kwadratu jej spółczynnika względem drugiej osi układu prostokątnego—równa się jedności”.

Wartość liczebna kąta jest liczbą dodatnią, nie przewyższającą liczby $2d$, jeżeli d oznacza wartość liczebną kąta prostego; dla zachowania wszakże ogólnej postaci wzorów, wyrażających pewne związki algiebraiczne (analogja z twierdzeniem Chaslesa) należy uogólnić pierwotne pojęcie wartości liczebnej kąta.

Zasadę uwzględniania znaku wartości liczebnej stosować możemy wówczas, gdy rozważamy kąty, leżące na jednej płaszczyźnie i rozróżniamy promienie, tworzące każdy z tych kątów: mówiąc o „kącie względnym $\widehat{AOB}$, nazywamy promień OA „ramieniem początkowym”, a promień OB— „ramieniem końcowym” danego kąta względnego. Uwzględniamy przeto „zwrot” kąta i odróżniamy kąt względny $\widehat{AOB}$ od kąta względnego $\widehat{BOA}$. Jeżeli dwa dowolne kąty względne leżą na jednej płaszczyźnie, to możemy sprowadzić je do wspólnego ramienia początkowego, przesuwając na płaszczyźnie jeden z tych kątów; ramiona końcowe—po sprowadzeniu kątów do wspólnego ramienia początkowego—mogą leżeć po jednej stronie, lub też po obu stronach wspólnego ramienia początkowego i stosownie do tego mówimy o kątach względnych, że „zwrócone są” w jedną stronę lub też w przeciwne strony.

Wartości liczebne kątów względnych, posiadających pewien określony zwrot, uważać możemy za dodatnie; wartości liczebne kątów względnych, zwróconych w przeciwną stronę uważamy wówczas za liczby ujemne. (Jeżeli ramię końcowe kąta względnego stanowi prze-

dłużenie ramienia początkowego, to kąt taki zaliczyć możemy do pierwszej lub do drugiej kategorji, przypisując mu ten lub inny zwrot).

Podstawowa własność wartości liczebnej (jakiejkolwiek wielkości gieometrycznej) polega na tym, że „wartość liczebna sumy dwuch lub więcej składników równa się sumie ich wartości liczebnych“. Dla zachowania powyższego związku niezbędne jest nowe uogólnienie pojęcia wartości liczebnej kąta.

Niech a oznacza wartość liczebną dowolnego kąta $\widehat{AOB}$ ($-2d \leqq a \leqq 2d$); dodając do tego kąta (lub odejmując od niego) 4, 8, ..., $4k$ kątów prostych, otrzymujemy ponownie kąt $\widehat{AOB}$: chcąc przeto zachować wspomniany związek ogólny, przypisywać należy danemu kątowi nowe wartości liczebne, a mianowicie $a+4kd$, gdzie k oznacza dowolną liczbę całkowitą (dodatnią, lub ujemną). Wartość liczebną a nazwać możemy „główną“ wartością kąta $\widehat{AOB}$, a wartości liczebne $a+4kd$ — wartościami „pochodnemi“.

Rozważając na płaszczyźnie kąty względne i wyznaczając zwrot kątów, posiadających dodatnie wartości główne, obieramy na danej płaszczyźnie trzy dowolne promienie OA, OB i OC; możemy wówczas dowieść, że jedna z wartości liczebnych kąta względnego $\widehat{AOC}$ równa się sumie wartości kątów względnych $\widehat{AOB}$ i $\widehat{BOC}$ niezależnie od tego, jakie jest położenie promieni OA, OB, OC. Wziąwszy przeto jakiekolwiek wartości liczebne kątów względnych: $\widehat{AOB}$ i $\widehat{BOC}$ wybrać można taką wartość liczebną kąta względnego $\widehat{AOC}$, ażeby otrzymać związek następujący:

$$(w.\,l.\,\widehat{AOC}) = (w.\,l.\,\widehat{AOB}) + (w.\,l.\,\widehat{BOC}).$$

Kąty względne, leżące na jednej płaszczyźnie, nazywamy „dodatniemi” lub „ujemnemi” zależnie od tego, jaki jest znak głównej wartości liczebnej.

Uwaga. W gieometrji elementarnej określamy kąt, jako figurę utworzoną przez dwa promienie, wyprowadzone z jednego punktu; proste pojęcia gieometryczne uogólniamy następnie w tradycyjnym wykładzie goniometrji, popełniając przytym dwa ważne błędy metodologiczne:

1) utożsamiamy dwa pojęcia różne: kąt i jego wartość liczebną, stosując jeden termin dla oznaczenia dwuch rzeczy różnych;

2) posługujemy się pojęciami kinematycznemi, rozważając promień „ruchomy", obracający się na płaszczyźnie dokoła pewnego punktu i określając uogólnione pojęcie kąta, jako wynik powyższego ruchu obrotowego.

4. Funkcje trygonometryczne.

Racjonalne uzasadnienie właściwych pojęć trygonometrycznych wymaga stwierdzenia następujących faktów:

I. Pomiędzy kątem ostrym trójkąta prostokątnego i stosunkiem dwuch określonych boków tego trójkąta istnieje związek, polegający na tym, że danej wartości kąta ostrego odpowiada ściśle określona wartość powyższego stosunku i odwrotnie; albowiem równość dwuch odpowiednich kątów ostrych jest dostatecznym i koniecznym warunkiem proporcjonalności odpowiednich boków w trójkątach prostokątnych.

II. Rozważając wielokąty foremne—wypukłe i gwiaździste —otrzymane z podziału okręgu na 2^n części równych, ułożyć można tablicę, zawierającą wartości liczebne kąta ostrego: $\frac{kd}{2^{n-1}}$ (gdzie $k=1, 2, \ldots, 2^{n-1}-1$) — i odpowiednie wartości stosunku dwuch boków trójkąta prostokątnego.

Określamy następnie funkcje trygonometryczne kąta ostrego jako stosunki boków trójkąta prostokątnego. Wprowadzenie tych nowych pojęć usprawiedliwiają dwa fakty powyższe: rozwiązywanie trójkąta prostokątnego za pomocą tablic jest bezpośrednim zastosowaniem funkcji trygonometrycznych kąta ostrego.

Podstawowe związki algiebraiczne pomiędzy funkcjami trygonometrycznemi danego kąta ostrego otrzymujemy w następujący sposób.

1) Posługujemy się wzorem, wyrażającym związek pomiędzy wartościami liczebnemi boków trójkąta prostokątnego ABC

$$a^2 + b^2 = c^2 ,$$

w którym a i b oznaczają wartości liczebne przyprostokątnej, przeciwległej kątowi A, i przyprostokątnej, przyległej do kąta A; biorąc przeciwprostokątną za jednostkę, względem której wyznaczamy wartości liczebne boków trójkąta, mamy:

$$a = \frac{BC}{AB} = sin A , \quad b = \frac{AC}{AB} = cos A , \quad c = \frac{AB}{AB} = 1 ,$$

skąd: $$sin^2 A + cos^2 A = 1 .$$

2) Stosunek przyprostokątnych trójkąta prostokątnego równa się stosunkowi ich wartości liczebnych, a więc

$$tgA = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b};$$

zachowując dawną jednostkę otrzymujemy

$$tgA = \frac{sinA}{cosA}.$$

3) Trzy pozostałe związki podstawowe

$$cotgA = \frac{1}{tgA},$$

$$secA = \frac{1}{cosA},$$

$$cosecA = \frac{1}{sinA}$$

nie wymagają dowodzenia, wynikają bowiem bezpośrednio z określenia funkcji trygonometrycznych kąta ostrego.

Wyprowadziwszy pięć związków powyższych należy zwrócić uwagę na to, że każde z tych równań jest niezależne od pozostałych, wszelki natomiast inny związek algiebraiczny pomiędzy sześcioma funkcjami danego kąta ostrego powinien być wynikiem pięciu związków podstawowych.

Rozważając funkcje trygonometryczne obu kątów ostrych trójkąta prostokątnego przekonywamy się bezpośrednio, że sinus, tangens i secans jednego z tych kątów są odpowiednio równe cosinusowi, cotangensowi i cosecansowi drugiego kąta ostrego. Związek, istniejący pomiędzy sinusem i cosinusem dwuch kątów ostrych, dopełniających się wzajemnie, uważać możemy za podstawowy, ponieważ dwa pozostałe mogą być dowiedzione za pomocą pierwszego związku i odpowiednich związków algiebraicznych, zawartych w poprzednim układzie podstawowym.

Ażeby poznać zależność funkcji trygonometrycznych kąta ostrego od wielkości tego kąta, odmierzamy dwa nierówne kąty ostre po jednej stronie wspólnego ramienia i z dowolnego punktu tego ramienia wystawiamy prostopadłą (do przecięcia z dwoma pozostałemi ramionami). Z nierówności przeciwprostokątnych i z nierówności jednej pary przyprostokątnych w dwuch otrzymanych trójkątach, posiadających wspólną przyprostokątną, wynikają nierówności pomiędzy stosunkami boków; te ostatnie dowodzą, że jeżeli kąt ostry wzrasta, to tangens i secans tego

kąta również wzrastają, a cotangens i cosinus — maleją. Z zależności cosinusa od wielkości kąta ostrego otrzymujemy następnie odpowiednią własność sinusa, uwzględniając związek algiebraiczny pomiędzy sinusem kąta ostrego i cosinusem tegoż kąta, lub też związek istniejący pomiędzy sinusem i cosinusem dwuch kątów ostrych, dopełniających się wzajemnie.

Jedną z zasad podstawowych w zastosowaniu rachunku algiebraicznego do gieometrji jest zasada zachowania ogólnej postaci wzorów, wyrażających związki algiebraiczne pomiędzy wartościami liczebnemi elementów danej figury bez względu na to, jakie są szczególne wartości tych elementów. Zgodnie z powyższą zasadą uogólnienie pojęć trygonometrycznych powinno być dokonane w ten sposób, ażeby związki, istniejące pomiędzy wartościami liczebnemi boków dowolnego trójkąta i funkcjami jego kątów ostrych, i jednocześnie te związki, jakie zachodzą pomiędzy poszczególnemi funkcjami trygonometrycznemi kąta ostego, — miały znaczenie ogólne: ażeby były przeto prawdziwe dla kątów, posiadających wszelkie inne wartości.

Weźmy dowolny trójkąt ABC, w którym bok BC leży naprzeciw kąta ostrego A i wyznaczmy rzut boku AB na bok AC; niechaj a, b, c oznaczają wartości liczebne odpowiednich boków: BC, CA, AB, a d niech oznacza wartość liczebną rzutu AD.

Pomiędzy liczbami a, b, c, d istnieje wówczas, jak wiadomo, następujący związek:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bd\,.$$

Wartość liczebną rzutu AD możemy wyrazić za pomocą wartości liczebnej boku AB i jednej z funkcji trygonometrycznych kąta ostrego A, mamy bowiem

$$\frac{AD}{AB} = \frac{d}{c} = \cos A\,,$$

skąd $$d = c\,.\,\cos A\,,$$

a więc $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,.\,\cos A\,.$$

Wzór powyższy wyraża związek algiebraiczny pomiędzy wartościami liczebnemi boków dowolnego trójkąta i funkcją trygonometryczną jednego z kątów ostrych tego trójkąta.

Jeżeli weźmiemy trójkąt ABC, w którym bok BC leży naprzeciw kąta rozwartego A, to pozostawiając poprzednie znakowanie wartości liczebnych odpowiednich elementów, mamy:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bd\,,$$

skąd $$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\,.\,\frac{d}{c}\,,$$

albo $$a^2=b^2+c^2+2bc\,.\,\frac{AD}{AB},$$

lub wreszcie $$a^2=b^2+c^2-2bc\left(-\frac{AD}{AB}\right).$$

Zestawiając ten wzór z dowiedzionym poprzednio wzorem, wyrażającym związek algiebraiczny pomiędzy wartościami liczebnemi boków trójkąta i cosinusem jednego z kątów ostrych, wnioskujemy, że dla uogólnienia wzoru

$$a^2=b^2+c^2-2bc\,.\,cosA$$

powinniśmy nazwać cosinusem kąta rozwartego A — liczbę ujemną, której wartość bezwzględna równa się stosunkowi $\frac{AD}{AB}$.

Widzimy więc, że cosinus kąta A jak w jednym, tak i w drugim wypadku określony być winien jako stosunek rzutu AD do odcinka AB, przyczym odcinek AB jest odcinkiem jednego z ramion kąta, a rzut AD — odcinka AB — wyznaczony jest na drugim ramieniu tego kąta, lub na jego przedłużeniu; należy jednak dodać, że stosunek $\frac{AD}{AB}$ powinien być wzięty ze znakiem ujemnym, gdy kąt A jest kątem rozwartym.

Ażeby otrzymać ogólne określenie cosinusa kąta dowolnego, należy AB i AD uważać za odcinki względne, których wartości liczebne są jednoimienne, gdy dany kąt A jest ostry, i różnoimienne, kiedy kąt ten jest rozwarty.

Ponieważ wreszcie bokom trójkąta, a więc i odcinkowi AB, przypisujemy zawsze wartości liczebne dodatnie, przeto wartość liczebna odcinka względnego AD powinna być w pierwszym wypadku dodatnią, a w drugim — ujemną.

Posługując się pojęciem spółczynnika układu osi kierunkowych, wyprowadzić możemy z rozważań powyższych następujące określenie ogólne:

„Cosinusem kąta dowolnego nazywamy spółczynnik układu osi kierunkowych, wyznaczonych przez ramiona tego kąta“.

Rozważania powyższe — stanowiące podstawę ogólnego określenia cosinusa — są niezależne od tego, czy mówimy o kącie bezwzględnym, czy też uwzględniamy następstwo jego ramion i przypisujemy kątowi temu wartość liczebną dodatnią lub ujemną, a więc i określenie, wyprowadzone z tych rozważań, stosować możemy zarówno do kątów bezwzględnych, jak i do kątów względnych.

Za podstawę ogólnego określenia sinusa kąta dowolnego przyjmujemy związek, istniejący pomiędzy sinusem i cosinusem dwuch kątów, dopełniających się wzajemnie, dowiedziony poprzednio dla kątów ostrych.

Jeżeli z wierzchołka dowolnego kąta względnego $\widehat{AOB}$ poprowadzony jest promień pomocniczy OD, tworzący kąt dodatni prosty z ramieniem początkowym OA, to dopełnieniem kąta $\widehat{AOB}$ jest wówczas kąt względny $\widehat{BOD}$; chcąc więc zachować związki, jakie zachodzą pomiędzy funkcjami trygonometrycznemi kątów, dopełniających się wzajemnie, należy określić sinus kąta $\widehat{AOB}$, jako liczbę równą cosinusowi kąta $\widehat{BOD}$. Określenie ogólne sinusa kąta dowolnego powinno być przeto następujące: „Sinusem kąta dowolnego nazywamy spółczynnik układu osi kierunkowych, wyznaczonych przez ramiona kąta, dopełniającego kąt dany“.

Widzimy przeto, że w określeniu sinusa kąta dowolnego uwzględniać należy następstwo ramion tego kąta i znak jego wartości liczebnej, ponieważ postać kąta dopełniającego zależy od położenia ramienia końcowego względem promienia pomocniczego, tworzącego kąt prosty dodatni z ramieniem początkowym. Określenie sinusa kąta bezwzględnego zawarte jest również w powyższym określeniu ogólnym, albowiem kąty bezwzględne utożsamiamy z kątami względnemi dodatniemi.

Tangens dowolnego kąta x określamy zapomocą wzoru

$$tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x} .$$

Dla określenia wreszcie trzech pozostałych funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta x posługujemy się następującemi wzorami:

$$cotg\, x = \frac{1}{tg\, x} ,$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} ,$$

$$cosec\, x = \frac{1}{\sin x} .$$

Rozważając funkcje trygonometryczne kąta dowolnego, jako liczby, zależne od wartości liczebnej tego kąta, otrzymujemy następujące wzory:

$$\sin(2k\pi + x) = \sin x ,$$

$$cos(2k\pi + x) = cos\,x\ ,$$

$$tg(2k\pi + x) = tg\,x \text{ i t. d.},$$

gdzie x oznacza jedną z wartości teoretycznych kąta, a k jest dowolną liczbą całkowitą (dodatnią lub ujemną), ponieważ $2k\pi + x$ jest wówczas również wartością teoretyczną tego samego kąta.

Związek, istniejący pomiędzy sinusem kąta ostrego i cosinusem tego samego kąta, istnieje również pomiędzy sinusem i cosinusem kąta dowolnego; jeżeli bowiem x jest wartością kąta $\widehat{AOB}$, to prowadząc promień pomocniczy OD, tworzący kąt prosty dodatni z ramieniem OA, określamy $sin\,x$ jako spółczynnik układu osi kierunkowych $B'B$ i $D'D$, wyznaczonych przez ramię OB i promień OD, a $cos\,x$ — jako spółczynnik układu osi $A'A$ i $B'B$, wyznaczonych przez ramiona OA i OB; suma kwadratów tych dwuch spółczynników osi $B'B$ względem osi $A'A$ i $D'D$ — tworzących układ prostokątny — równa się jedności, mamy przeto zawsze

$$sin^2 x + cos^2 x = 1\ .$$

Jeżeli x oznacza jedną z wartości liczebnych teoretycznych dowolnego kąta względnego, to $\frac{\pi}{2} - x$ jest wartością liczebną kąta dopełniającego i nawzajem: dopełnieniem wartości liczebnej $\frac{\pi}{2} - x$ jest x; mamy przeto

$$sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cos\,x\ ,$$

$$cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sin\,x\ ,$$

ponieważ zachowaliśmy związek podstawowy pomiędzy sinusem i cosinusem dwuch kątów, dopełniających się wzajemnie, określając sinus kąta dowolnego.

Określiliśmy funkcje trygonometryczne dowolnego kąta względnego, zachowując pięć podstawowych związków algiebraicznych, dowiedzionych poprzednio dla funkcji trygonometrycznych kąta ostrego; zachowaliśmy również związek, istniejący pomiędzy sinusem i cosinusem dwuch kątów, dopełniających się wzajemnie. Wszelki inny związek algiebraiczny pomiędzy poszczególnemi funkcjami kąta danego — jak już zauważyliśmy dawniej — jest jedynie wynikiem pięciu związków podstawowych; ta sama uwaga dotyczy także związków, wyrażonych zapomocą wzorów

$$tg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=cotg\ x,$$

$$ctg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=tg\ x,$$

$$sec\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=cosec\ x,$$

$$cosec\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=sec\ x;$$

ponieważ wiadomo, że wzorów tych dowieść możemy, posługując się podstawowemi związkami algiebraicznemi i związkiem, istniejącym pomiędzy sinusem i cosinusem dwuch kątów, dopełniających się wzajemnie.

Ponieważ sinus i cosinus dowolnego kąta względnego są spółczynnikami pewnych układów osi kierunkowych, a mianowicie: układu, wyznaczonego przez ramiona kąta dopełniającego kąt dany, i układu, wyznaczonego przez ramiona kąta danego, — przeto własności tych dwuch funkcji trygonometrycznych wynikają bezpośrednio z odpowiednich własności spółczynnika układu osi kierunkowych.

1) Bezwzględna wartość sinusa i cosinusa kąta dowolnego nie przewyższa jedności:

$$-1 \leqslant sin\ x \leqslant 1\ ,$$
$$-1 \leqslant cos\ x \leqslant 1\ ;$$

albowiem własność tę posiada spółczynnik każdego układu osi kierunkowych.

2) Znak sinusa zależy od postaci kąta, dopełniającego kąt dany, a znak cosinusa—od postaci kąta danego.

Sinus kąta dowolnego jest liczbą dodatnią, zerem lub liczbą ujemną zależnie od tego, czy dopełnienie kąta danego jest kątem ostrym, prostym czy też rozwartym.

Jeżeli kąt dany jest kątem prostym dodatnim, to ramiona kąta, dopełniającego kąt dany, przystają do siebie i sinus kąta danego równa się wówczas jedności dodatniej; jeżeli zaś kąt dany jest kątem prostym ujemnym, to jedno z ramion kąta dopełniającego jest przedłużeniem drugiego ramienia i sinus kąta danego równa się wtedy jedności ujemnej.

Cosinus kąta dowolnego jest liczbą dodatnią, zerem lub liczbą ujemną zależnie od tego, czy kąt ten jest kątem ostrym, prostym czy też rozwartym. Jeżeli ramiona kąta danego przystają do siebie, to cosinus tego kąta równa się

jedności dodatniej; jeżeli zaś jedno z ramion kąta stanowi przedłużenie drugiego ramienia, to cosinus takiego kąta równa się jedności ujemnej.

3) Jeżeli dwa kąty spełniają się wzajemnie, to sinusy tych kątów są równe, a cosinusy ich różnią się tylko znakami.

Od wspólnego ramienia początkowego OA odmierzamy dwa kąty względne spełniające się wzajemnie; ramiona końcowe OB i OB_1 są wówczas symetryczne względem promienia pomocniczego OD i równe są przeto spółczynniki tych dwuch układów, jakie tworzy oś wyznaczona przez promień pomocniczy z osiami, wyznaczonemi przez ramiona końcowe kątów $\widehat{AOB}$ i $\widehat{AOB_1}$; a więc

$$\sin \widehat{AOB_1} = \sin \widehat{AOB} .$$

Spółczynniki tych dwuch układów, jakie tworzy oś wyznaczona przez ramię początkowe OA, z osiami, wyznaczonemi przez ramiona OB i OB_1, różnią się tylko znakami, mamy zatym:

$$\cos \widehat{AOB_1} = -\cos \widehat{AOB}.$$

Niech x oznacza jedną z wartości liczebnych teoretycznych kąta $\widehat{AOB}$, wówczas $\pi - x$ jest wartością liczebną kąta $\widehat{AOB_1}$; otrzymujemy przeto dwa następujące związki:

$$\sin(\pi - x) = \sin x ,$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos x .$$

4) Jeżeli dwa kąty względne różnią się tylko znakami wartości liczebnych, to i sinusy tych kątów różnią się tylko znakami, a cosinusy ich są równe.

Od wspólnego ramienia początkowego OA odmierzamy dwa takie kąty względne, których wartości liczebne różnią się tylko znakami; ramiona końcowe OB i OB_1 są wówczas symetryczne względem ramienia początkowego OA, a więc spółczynniki tych dwuch układów, jakie tworzy oś wyznaczona przez ramię początkowe z osiami, wyznaczonemi przez ramiona końcowe są równe; skąd

$$\cos \widehat{AOB_1} = \cos \widehat{AOB} .$$

Spółczynniki tych układów, jakie tworzy oś, wyznaczona przez promień pomocniczy, z osiami, wyznaczonemi przez ramiona końcowe, różnią się tylko znakami; a więc

$$\sin \widehat{AOB_1} = -\sin \widehat{AOB}\,.$$

Oznaczając wartość liczebną kąta $\widehat{AOB}$ literą x, otrzymujemy dwa następujące związki:

$$\sin(-x) = -\sin x\,,$$
$$\cos(-x) = \cos x\,.$$

5) Jeżeli różnica dwuch kątów względnych równa się dwum kątom prostym, to zarówno sinusy, jak i cosinusy tych dwuch kątów względnych różnią się tylko znakami.

Biorąc promień OA za wspólne ramię początkowe, odmierzamy dwa kąty względne $\widehat{AOB}$ i $\widehat{AOB_1}$, różnica których równa się dwum kątom prostym; promień OB_1 jest wówczas przedłużeniem promienia OB. Spółczynnik układu osi kierunkowych, wyznaczonych przez promienie OD i OB_1, różni się tylko znakiem od spółczynnika układu osi, wyznaczonych przez promienie OD i OB; ten sam związek istnieje również pomiędzy spółczynnikami układów osi kierunkowych, wyznaczonych przez promienie OA i OB_1 i wyznaczonych przez promienie OA i OB; skąd

$$\sin \widehat{AOB_1} = -\sin \widehat{AOB}\,,$$

$$\cos \widehat{AOB_1} = -\cos \widehat{AOB}\,.$$

Niech x oznacza wartość teoretyczną kąta $\widehat{AOB}$, $\pi + x$ jest wtedy wartością teoretyczną kąta AOB_1; znajdujemy przeto dwa takie związki:

$$\sin(\pi + x) = -\sin x\,,$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos x\,.$$

6) Cosinus różnicy dwuch dowolnych kątów względnych równa się sumie iloczynu cosinusów i iloczynu sinusów tych dwuch kątów.

Rozważamy na płaszczyźnie dwa dowolne kąty względne: $\widehat{AOB}$, $\widehat{AOC}$ i wyznaczamy zwrot kątów dodatnich, prowadząc promień pomocniczy OD, tworzący kąt prosty dodatni ze wspólnym ramieniem początkowym.

Niechaj α i β oznaczają wartości liczebne kątów względnych $\widehat{AOB}$ i $\widehat{AOC}$; różnica $(\alpha-\beta)$ jest wówczas jedną z wartości liczebnych

kąta względnego $\widehat{COB}$, ponieważ wartość tego kąta możemy zawsze wybrać w ten sposób, ażeby spełniony został związek:

$$(w. l. \widehat{AOB}) = (w. l. \widehat{AOC}) + (w. l. \widehat{COB}) \, ,$$

skąd

$$(w. l. \widehat{COB}) = (w. l \widehat{AOB}) - (w. l. \widehat{AOC}) = \alpha - \beta \, .$$

Promienie OA, OB, OC, OD wyznaczają osie kierunkowe: $A'A$, $B'B$, $C'C$, $D'D$. Stosując twierdzenie VI o spółczynniku układu osi kierunkowych i uwzględniając określenie sinusa i cosinusa, otrzymujemy:

$$\cos \widehat{COB} = \cos \widehat{AOB} \, . \cos \widehat{AOC} + \sin \widehat{AOB} \, . \sin \widehat{AOC} \, ,$$

albo

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \, . \cos\beta + \sin\alpha \, . \sin\beta \, .$$

Wnioski:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos[\alpha - (-\beta)] = \cos\alpha \, . \cos(-\beta) + \sin\alpha \, . \sin(-\beta) =$$
$$= \cos\alpha \, . \cos\beta - \sin\alpha \, . \sin\beta \, ;$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right] =$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) . \cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) . \sin\beta =$$
$$= \sin\alpha \, . \cos\beta + \cos\alpha \, . \sin\beta \, ;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin[\alpha + (-\beta)] = \sin\alpha \, . \cos(-\beta) + \cos\alpha \, . \sin(-\beta) =$$
$$= \sin\alpha \, . \cos\beta - \cos\alpha \, . \sin\beta \, .$$

Własności czterech pozostałych funkcji trygonometrycznych wynikają z określenia tych funkcji i z odpowiednich własności sinusa i cosinusa.

Ludomir Wolfke.